



TITLE:

Affine Symmetric Spaceにおける境界値問題 (指標と不変固有超函数)

AUTHOR(S):

大島, 利雄; 関口, 次郎

CITATION:

大島, 利雄 ...[et al]. Affine Symmetric Spaceにおける境界値問題 (指標と不変固有超函数). 数理解析研究所講究録 1977, 300: 40-53

ISSUE DATE:

1977-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103796>

RIGHT:

Affine symmetric space における境界値問題

東大 教養 大島 利雄

京大 数理研 関口 次郎

§1 Helgason - Okamoto 予想

偏微分方程式の境界値問題で最も基本的な例として, "単位円 $D \equiv \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 内の調和函数 $u(z)$ は, 単位円周 $B \equiv \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ 上の境界値が $\varphi(e^{i\theta})$ であれば,

$$u(z) = (P\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \varphi(e^{i\theta}) d\theta$$

と Poisson 積分により表示される" という事実がある. また Poisson 変換

$$P: \begin{array}{c} \text{"B 上の函数の空間"} \\ \downarrow \\ \varphi \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{"D 上の調和函数全体の空間"} \\ \downarrow \\ P\varphi \end{array}$$

を考えたとき, B 上の函数の空間として hyperfunction 全体をとったときのみ上の Poisson 変換が bijective になる (この事実は hyperfunction の定義から直ちに従う). 逆に任意の調和函数に対し, その B 上の境界値が存在し, それは hyperfunction になる.

これは、表現論的に次のような意味をもっている：

D は等質対称リーマン空間 $SL(2, \mathbb{R}) / SO(2)$ で、 B はその Martin 境界 $SL(2, \mathbb{R}) / \{(\circ *) \in SL(2, \mathbb{R})\}$ である。そして、調和函数というのは、 D の Poincare metric に対する Laplace-Beltrami operator Δ の固有値 0 に属する固有函数に他ならない。自然に、 B, D 上の hyperfunction 全体の空間 $\mathcal{B}(B), \mathcal{B}(D)$ を

$$\mathcal{B}(B) \simeq \{\varphi \in \mathcal{B}(SL(2, \mathbb{R})); \varphi(g(\circ *)) = \varphi(g)\}$$

$$\mathcal{B}(D) \simeq \{f \in \mathcal{B}(SL(2, \mathbb{R})); f(gk) = f(g), \forall k \in SO(2)\}$$

とみなしたとき、Poisson 積分は、 $SO(2)$ の正規化された Haar measure dk により

$$(P\varphi)(g) = \int_{SO(2)} \varphi(gk) dk$$

と表示される。よって、Poisson 変換は Lie 群 $SL(2, \mathbb{R})$ の (無限次元) 表現空間 $\mathcal{B}(B)$ から D 上の調和函数の空間への全単射の intertwining operator であるといえることができる。

Δ は $SL(2, \mathbb{R})$ の作用と可換なので、 Δ の一般の固有値 μ に属する固有空間 $C^\infty(D, \mu)$ も $SL(2, \mathbb{R})$ の表現空間となっている。Helgason [2] は、次の Poisson 変換

$$\begin{array}{ccc} P: \mathcal{B}(B, s) & \longrightarrow & C^\infty(D, \chi_s) \equiv \{f \in C^\infty(D); \Delta f = \chi_s f\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi & \longmapsto & (P\varphi)(g) \equiv \int_{SO(2)} \varphi(gk) dk \end{array}$$

が bijective になることを示した (ただし, $s \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$).

ここで,

$$\begin{cases} \mathcal{B}(B, s) \equiv \{ \varphi \in \mathcal{B}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})); \varphi(g \begin{pmatrix} 1 & \\ & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \\ & \sqrt{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}) = y^{\frac{1}{2}-s} \varphi(g) \} \\ \Delta \equiv (1-|z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \\ \mu \equiv \chi_s \equiv (s - \frac{1}{2})(s + \frac{1}{2}) \in \mathbb{C} \end{cases}$$

これはさらに次の予想へと発展した.

Helgason - Okamoto 予想 リーマン対称空間 X 上の任意の球関数 (= X 上の不変微分作用素の同時固有函数) は, X の Martin 境界 M 上の hyperfunction の Poisson 積分として表示される."

この予想は [4] により完全に解決されたが, その結果を述べ, さらに Riemannian でない対称空間の場合の定式化をするため, 記号の準備をする.

§2 Notation

G を中心が有限な連結実半単純リ-群, K をその極大コンパクト群とし, G, K のリ-環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とおく.

$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}; \theta(X) = -X\}$ の極大ア-ベル部分空間の1つを \mathfrak{a} とおき, \mathfrak{a} の双対空間を \mathfrak{a}^* , \mathfrak{a}^* の複素化を $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とかく.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に関するルート系を Σ とおき, Σ に適当な順序を入れたときの正のルートの全体を Σ^+ , 正の単純ルートの全体

を $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ とする. さらに, $\alpha \in \Sigma$ とするとき

$$\mathfrak{g}^\alpha \equiv \{X \in \mathfrak{g}; [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\},$$

$$m(\alpha) \equiv \dim \mathfrak{g}^\alpha,$$

$$\mathfrak{n} \equiv \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \bar{\mathfrak{n}} = \theta(\mathfrak{n})$$

$$\Sigma_0^+ \equiv \{\alpha \in \Sigma^+; \frac{\alpha}{2} \notin \Sigma\}$$

とおき, リー環 \mathfrak{h} , \mathfrak{n} に対応する G の連結部分リー群を A , N とする. このとき, $G = KAN$ は岩沢分解となり, $P = MAN$ は G の極小放物型部分群となる. \mathfrak{h} の K における中心化群, 正規化群をそれぞれ M , M^* であらわし, M のリー環を \mathfrak{m} とおく. 商群 $W = M^*/M$ は Weyl 群となり, 自然に \mathfrak{h} に作用する. \mathfrak{g} の Killing form から定義される \mathfrak{h} の内積 \langle, \rangle によって, \mathfrak{h} と \mathfrak{h}^* とが同一視できる. この同一視を用いれば, \mathfrak{h}^* 上にも内積が定義できるので, それも \langle, \rangle であらわす. 同様に, W の作用が \mathfrak{h}^* 上にも定義される.

一般に, 実解析的多様体 X 上の hyperfunction, Schwartz の超関数, C^∞ -級関数の全体の空間をそれぞれ, $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{D}'(X)$, $C^\infty(X)$ であらわす.

§3 リーマン対称空間の場合

等質空間 G/K は, 非コンパクト型対称リーマン空間となり, 等質空間 G/P は, その Martin 境界とよばれる. \mathfrak{g} , \mathfrak{h} の複素

この universal enveloping algebra を $U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{a})$ とかく. $U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{a})$ は, G , A 上の (左) - 不変微分作用素の全体 $D(G)$, $D(A)$ と同一視できる. すると,

$$D(G)^K = \{D \in U(\mathfrak{g}); \text{Ad}(k)D = D, \forall k \in K\}$$

とおくことにより, G/K 上の不変微分作用素の全体 $D(G/K)$ は, 自然に

$$(1) \quad D(G/K) \simeq D(G)^K / D(G)^K \cap D(G)^K$$

とみなせる. 一方, $U(\mathfrak{g})$ の元 D に対し,

$$D - D'_\alpha \in \pi U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})K$$

となる $D'_\alpha \in U(\mathfrak{a})$ がただ1つ定まるので,

$$e^\rho(a) = e^{\rho \log a} \quad (a \in A)$$

という A 上の函数 e^ρ を用いて

$$(2) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma} : D(G)^K &\longrightarrow U(\mathfrak{a}) \\ \downarrow D &\longmapsto D_\alpha \equiv e^\rho \circ D'_\alpha \circ e^{-\rho} \end{aligned}$$

という写像が定義できるが, これら (1) と (2) は

$$(3) \quad \gamma : D(G/K) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{a})^W$$

という algebra homomorphism をひきおこす (Chevalley の定理).
ここで,

$$U(\mathfrak{a})^W \equiv \{D \in U(\mathfrak{a}); \text{Ad}(\bar{w})D = D, \forall w \in W\}$$

(\bar{w} は $w \in W$ の M^* における代表元の1つ)

である. $D(G/K)$ は l (= 正の元の数 = G/K の階数) 個

の不定元をもつ \mathbb{C} 上の多項式環と同型になる。

$\pi_{\mathbb{C}}^*$ の元 λ が与えられたとき, それは $\text{Hom}_{\text{alg}}(U(\mathfrak{g}); \mathbb{C})$ の元 $\tilde{\lambda}$ に唯一に拡張されるので, $\chi_{\lambda} \in \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathbb{D}(G/K); \mathbb{C})$ が, $\chi_{\lambda}(D) = \tilde{\lambda}(\tau(D))$ ($D \in \mathbb{D}(G/K)$) によって定義できる。このとき, 任意の $\chi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathbb{D}(G/K); \mathbb{C})$ に対し, $\chi_{\lambda} = \chi$ となる $\lambda \in \pi_{\mathbb{C}}^*$ が存在すること, および, 任意の $w \in W$ に対し, $\chi_{w\lambda} = \chi_{\lambda}$ となることに注意しておく。

G 上の hyperfunction の空間 $\mathcal{B}(G)$ は,

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{B}(G) & \longrightarrow & \mathcal{B}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (g, f(x)) & \longmapsto & (\tau_g f)(x) \equiv f(g^{-1}x) \end{array}$$

により, G -加群となるが, 以下, これの G -部分加群をいくつか定義する。

$\lambda \in \pi_{\mathbb{C}}^*$ に対し, G/P 上の線形束値関数の空間:

$$\mathcal{B}(G/P; \lambda) \equiv \{ \varphi \in \mathcal{B}(G); \varphi(xman) = e^{(\lambda-\rho) \log a} f(x), \\ \forall x \in G, \forall m \in M, \forall a \in A, \forall n \in N \}$$

これは, 自然に FS-空間 (cf. [6]) の位相が入る。

$\chi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathbb{D}(G/K), \mathcal{M}(\chi))$ に対し, G/K 上の球関数の空間:

$$C^{\infty}(G/K; \mathcal{M}(\chi)) \equiv \{ f \in C^{\infty}(G/K); \Delta f = \chi(\Delta) f, \forall \Delta \in \mathbb{D}(G/K) \}$$

これも自然に, FS-空間 $C^{\infty}(G/K)$ の閉部分空間として, FS-空間となる。

さて, Poisson 変換を

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} P_\lambda : B(G/P, \lambda) & \rightarrow & B(G/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(x) & \mapsto & (P_\lambda \varphi)(xK) \equiv \int_K \varphi(xk) dk \end{array}$$

により定義する (dk は K 上の正規化された Haar 測度).
 これは, $H(g) = \log a \quad (g \in K a N)$ により定義される
 G 上の函数 $H(g)$ を用いて,

$$(5) \quad (P_\lambda \varphi)(xK) = \int_K \varphi(k) e^{-(\lambda + \rho)H(x^{-1}k)} dk$$

と表わすこともできる.

定理. [4]. Poisson 変換 (4) は, FS - 空間の間の連続
 な G -準同型写像

$$(6) \quad P_\lambda : B(G/P; \lambda) \rightarrow C^\infty(G/K; m(\chi_\lambda))$$

をひきおこす. (6) が, 上への位相同型となるための必要十分条件は,

$$(7) \quad e_\lambda \equiv \left\{ \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m(\alpha)}{2} + 1 + \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m(\alpha)}{2} + m(2\alpha) + \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\right)\right) \right\}^{-1} \neq 0$$

で与えられる.

注意 特に,

$$(8) \quad -2\langle \lambda, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \notin \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \forall \alpha \in \Sigma^+$$

ならば, (7) が成立するので, (6) は位相同型となる.

任意の $\chi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathbb{D}(G/K); \mathbb{C})$ に対し, (8) を満たす $\lambda \in \pi_{\mathbb{C}}^*$ で $\chi = \chi_{\lambda}$ となるものの存在が容易にわかるので, Helgason-Okamoto 予想は, この定理から従う.

$e_{\lambda} = 0$ のときは, P_{λ} は単射でも全射でもない. P_{λ} の核と像については [4] を見よ.

$C^{\infty}(G/K; m(\chi_{\lambda}))$ が既約となるための必要十分条件は, $e_{\lambda} \cdot e_{-\lambda} \neq 0$ となることである [3].

次に, $B(G/P; \lambda)$ の部分空間の場合を述べる.

$$\mathcal{D}'(G/P; \lambda) \equiv B(G/P; \lambda) \cap \mathcal{D}'(G)$$

とおくと, これは自然に DFS - 空間 (cf. [6]) となる.

さらに,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(G) \equiv \{ f \in C^{\infty}(G); \forall D \in \mathbb{D}(G), \exists c, l > 0 \\ \text{s.t. } |(Df)(ka k')| \leq c e^{l \langle \log a, \log a \rangle^{1/2}} \\ \text{for } \forall k, k' \in K, a \in A \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}^*(G/K; m(\chi)) \equiv C^{\infty}(G/K; m(\chi)) \cap \mathcal{E}^*(G)$$

とおくと, $\mathcal{E}^*(G/K; m(\chi))$ は, DFS - 空間 $\mathcal{E}^*(G)$ の閉部分空間として DFS - 空間になる.

このとき, 前定理は, $B(G/P; \lambda)$, $C^{\infty}(G/K; m(\chi_{\lambda}))$, FS - 空間を, それぞれ $\mathcal{D}'(G/P; \lambda)$, $\mathcal{E}^*(G/K; m(\chi_{\lambda}))$, DFS - 空間 に置き換えて, そのまま成立する. これは,

前定理を使うことにより、容易に証明できる。

Lewis [7] は, $P_\lambda(\mathcal{D}'(G/P, \lambda)) \subset \mathcal{E}^*(G/K; m(X_\lambda))$ となること, および, G/K の階数が 1 の場合に,

$P_\lambda(\mathcal{D}'(G/P, \lambda)) = \mathcal{E}^*(G/K; m(X_\lambda))$ となる為の十分条件を求めている。

§ 4 一般の対称空間の場合

Riemannian とは限らない一般の対称空間 (= affine symmetric space) は infinitesimal には Berger [1] によって分類されている。ここでは, そのうち最も扱い易い次の場合に限ろう。すなわち, G/K' という等質空間であって, K' のリ-環の複素化が K の複素化と一致するような場合である。例えば, $SL(n, \mathbb{R})/SO(p, n-p)$, $Sp(n, \mathbb{R})/U(p, n-p)$, $Sp(n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R})$,

定義 1. $\varepsilon: \Sigma \rightarrow \{-1, 1\}$ という任意の写像を

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\alpha_1)^{m_1} \cdots \varepsilon(\alpha_\ell)^{m_\ell} \quad \text{for } \alpha = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_i \in \Sigma$$

により, $\varepsilon: \Sigma \rightarrow \{-1, 1\}$ という写像に拡張し, それを "ルートの符号" と呼ぶ。ルートの符号 ε に対し, \mathfrak{g} の involutive automorphism θ_ε が,

$$\begin{cases} \text{(i)} & \theta_\varepsilon(X) = \varepsilon(\alpha) \theta(X), & X \in \mathfrak{g}^\alpha \quad (\alpha \in \Sigma) \\ \text{(ii)} & \theta_\varepsilon(X) = \theta(X), & X \in \mathfrak{m} + \mathfrak{a} \end{cases}$$

によって定義できる.

$k_\varepsilon \equiv \{X \in \mathfrak{g}; \theta_\varepsilon(X) = X\}$ とおき, K_ε^0 を k_ε に対応する G の連結部分リ-群とし, $K_\varepsilon \equiv M K_\varepsilon^0$ とおく.

(このとき, " K_ε が compact $\Leftrightarrow \varepsilon(\alpha) = 1$ ($\forall \alpha \in \bar{\Sigma}$)")

さらに, $M_\varepsilon^* \equiv M^* \cap K_\varepsilon$, $W_\varepsilon \equiv M_\varepsilon^* \cap M$ とおき, $w_1 = e$, w_2, \dots, w_r を $W_\varepsilon \setminus W$ の代表系とする ($r = [W : W_\varepsilon]$).

補題 2. i) $\mathfrak{g} = k_\varepsilon + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ (direct sum)

ii) $G \supset \bigcup_{i=1}^r K_\varepsilon \bar{w}_i A N$ (open dense, unique, disjoint)

補題 3. $D(G/K_\varepsilon)$ を, 対称等質空間 G/K_ε 上の不変微分作用素全体のなす環とすると, §3 の (1), (2), (3) が, K, k を $K_\varepsilon, k_\varepsilon$ に代えてそのまま成立し, $\lambda \in \sigma_\mathbb{C}^*$ に対して $\chi_\lambda \in \text{Hom}_{\text{alg}}(D(G/K_\varepsilon); \mathbb{C})$ が定義される.

$\chi \in \text{Hom}_{\text{alg}}(D(G/K_\varepsilon); \mathbb{C})$ に対して

$$\mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \chi) \equiv \{f \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon); \Delta f = \chi(\Delta) f, \forall \Delta \in D(G/K_\varepsilon)\}$$

という G -加群を定義し, さらに $\lambda \in \sigma_\mathbb{C}^*$ に対して, G 上の函数 $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$ ($g \in G$) を

$$e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))} = \begin{cases} e^{\lambda \log a} & \text{if } g \in K_\varepsilon \bar{w}_i a N \quad (a \in A) \\ 0 & \text{if } g \notin K_\varepsilon \bar{w}_i A N \end{cases}$$

によって定義する.

補題 4. $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$ は, $\lambda \in \sigma_\mathbb{C}^*$ を meromorphic parameter とする G 上の超函数である. しかも,

$$(9) \quad -2\langle \lambda, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \notin \mathbb{Z}, \quad \forall \alpha \in \bar{\Sigma}$$

を満たす λ は, その pole にはならない.

このとき, 部分 Poisson 変換を

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} P_{\lambda, \varepsilon}^i : \mathcal{B}(G/P; \lambda) & \rightarrow & \mathcal{B}(G/K_\varepsilon) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi & \mapsto & (P_{\lambda, \varepsilon}^i \varphi)(gK_\varepsilon) \equiv \int_K \varphi(k) e^{-(\lambda + \rho) H_\varepsilon^i(g^{-1}k)} dk \end{array}$$

によって定義する.

定理 [11]. $\lambda \in \mathcal{O}_\mathbb{C}^*$ が (9) を満たせば, (10) によって定義される次の Poisson 変換が, 上への G -同型写像になる.

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} P_{\lambda, \varepsilon} : \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{B}(G/P; \lambda) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; m(\chi_\lambda)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\varphi_1, \dots, \varphi_r) & \mapsto & \sum_{i=1}^r P_{\lambda, \varepsilon}^i \varphi_i \end{array}$$

ε が trivial な符号のとき (i.e. $\varepsilon(\alpha) = 1, \forall \alpha \in \bar{\Sigma}$) は, §3 に対応するが, 条件 (9) は条件 (8) よりも強い.

次に, $\mathcal{D}'(G/P, \lambda)$ の場合を考えよう.

$$\mathcal{E}_*(G/K_\varepsilon) \equiv \{f \in C^\infty(G); f(gk') = f(g) \quad (\forall g \in G, \forall k' \in K_\varepsilon)\}$$

かつ, $\forall D \in \mathcal{D}(G), \forall l > 0, \exists C_{l,D} > 0$ s.t.

$$|(Df)(ka)| \leq C_{l,D} e^{-l \langle \log a, \log a \rangle^{1/2}} \quad (\forall k \in K, \forall a \in A)$$

とおくと, $\mathcal{E}_*(G/K_\varepsilon)$ は FS-空間となる. その双対空間を $\mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon)$ とあらわすと DFS-空間となるが, その閉部分空間として,

$\mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi)) \equiv \mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon) \cap \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi))$
 も DFS - 空間となる。このとき, $\lambda \in \mathcal{M}_\mathbb{C}^*$ が (9) を満たす
 ならば, Poisson 変換 (11) は, DFS - 空間の間の topological
 onto G -isomorphism

$$(12) \quad P_{\lambda, \varepsilon} : \bigoplus^r \mathcal{D}'(G/P; \lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'^*(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

をひきおこす。この結果も, 前頁の定理の系として得られる。

§ 5 補足

§ 3, § 4 の定理の証明の本質的な部分は次のとおりである:
 対称空間を, G が解析的に作用するあるコンパクト多様体の中へ open に実現し, Martin 境界が実際の "境界" として現われてくるようにすること (cf. [9])。そして, 問題を '確定特異点型境界値問題' として捕えて, Poisson 変換の逆写像を構成すること (cf. [5]) である。

§ 3, § 4 の定理は, 任意の球函数と Martin 境界上の函数との対応を与えているので, 種々の特殊な球函数を扱うのにその結果が応用できる。特殊球函数として, 左からも群 G のある部分群で不変, あるいは相対不変な函数が考えられる。

たとえば, その群として, やはり K_ε 型の群をもってきた場合, その様な函数の次元, 積分表示, 函数等式などがわかる [12]。 $G = SL(n, \mathbb{R})$ ならば, $SO(p, n-p) \backslash SL(n, \mathbb{R}) / SO(q, n-q)$

上の函数で, $U(\mathcal{A}(n, \mathbb{R}))$ の center の 同時固有函数である.

G の discrete subgroup Γ をもってきたとき, G/K_E 上の Eisenstein series およびその函数等式が得られる (cf. [12], [13]). これは, G/K 上の実解析的 Eisenstein series に対応するものである. 一方, holomorphic modular form として, たとえば $Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$ 上には Siegel modular form があるが, $Sp(n, \mathbb{R})/U(p, n-p)$ 上にもそれに対応するものがある (正則領域上ではないから正則函数としては実現できないが), それから新しい Dirichlet series (函数等式をもつ) が得られる. (cf. [10], [14]).

References

- [1] M. Berger: Les espace symétriques non compacts, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 74(1957), 85-177.
- [2] S. Helgason: A duality for symmetric space with applications to group representations, Advances in Math., 5 (1970), 1-154.
- [3] ——— : ——— II, ibid, 22(1976), 187-219.
- [4] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka: Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, to appear.
- [5] M. Kashiwara and T. Oshima: Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value

problems, to appear in Ann. of Math..

- [6] H. Komatsu: Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces, J. of Math. Soc. Japan, 19 (1967), 366-383.
- [7] J. Lewis: Eigenfunctions on symmetric spaces with distribution-valued boundary forms, preprint.
- [8] K. Minemura and T. Oshima: 確定特異点型境界値問題と表現論, '数学' に掲載予定.
- [9] T. Oshima: A realization of Riemannian symmetric spaces, to appear.
- [10] ———: 対称空間の種々の境界に対する境界値問題, 数理解析研究所講究録, 281 (1976), 211-226.
- [11] T. Oshima and J. Sekiguchi: Boundary value problem on symmetric homogeneous spaces, to appear in Proc. Japan Acad..
- [12] ———: 対称空間上の種々の特殊固有函数について, '77.4 数理研での「超局所解析」研究集会の講究録に掲載予定.
- [13] F. Sato: 二次形式のゼータ函数と特殊函数, '77.4月. 数理研での「超局所解析」研究集会の講究録に掲載予定.
- [14] T. Suzuki: 変数係数の二次形式のゼータ函数について, '77.4月 数理研での「超局所解析」研究集会の講究録に掲載予定.